

امتحان السداسي الأول 2024/2023

تمرين 1. (4pts)

برهن أن التناقص اللوغاريتمي يمكن حسابه من المعادلة التالية:

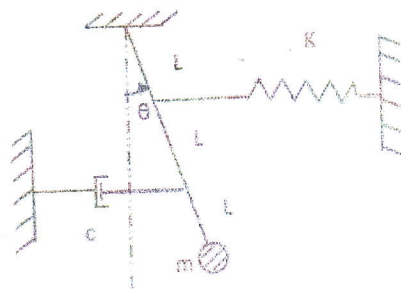
$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_1}{x_{n+1}}$$

تمرين 2. (7pts)

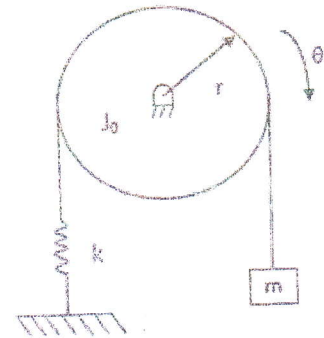
جهاز الشكل 1 ممثل من كتلة m وبكرة ذات كتلة M و نابض له ثابت مرونة k ، استعمل طريقتي نيوتن و لافرانج لإيجاد ذبذبة الترددات بدلالة M و m .

تمرين 3. (9pts)

- الجهاز الممثل في الشكل 2 عبارة عن كتلة m موصولة بقضيب عديم الوزن طوله $3L$.
- استعمل طريقة لافرانج لإيجاد ذبذبة ترددات الاخماد.
 - استجابة الجهاز عند $\theta(0) = \theta_0$ و $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$
 - استجابة الجهاز على شكل شعاع دائري.
 - سعة الحركة و ثابت الطور.



الشكل 2



الشكل 1

حل امتحان الهندسة الأولى 2033-2034
Théorie de Mécanismes.

تمرين 1 (4P5)

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_1}{x_{n+1}}$$

نسبة أي نسبتين متتاليتين هي

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = e^{\delta} \quad 1$$

النسبة $\frac{x_1}{x_{n+1}}$ يمكن كتابتها كما يلي:

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \left(\frac{x_3}{x_4} \right) \dots \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} \right) \quad 1$$

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = (e^{\delta})^n = e^{n\delta} \quad 1$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_1}{x_{n+1}} \quad 1$$

تمرين 2 (7P5)

- طريقة نيوتن

$$\sum F_i = m \ddot{x}$$

بالنسبة للأتلة m

$$(1) \quad mg - T = m \ddot{x} \quad 0,5$$

بالنسبة للبكرة

$$(2) \quad T \cdot r - K r^2 (\theta - \theta_0) = J_0 \ddot{\theta} \quad 0,5$$

$$J_0 = \frac{1}{2} M r^2$$

التوازن الساكني

$$mg \cdot r = k r \tilde{\theta} \quad \leftarrow \quad T \cdot r = k r \tilde{\theta} \quad 0.5$$

نصبح المعادلة (2)

$$(mg - m\ddot{\theta})r - k r \tilde{\theta} - mg r = \frac{1}{2} M r^2 \ddot{\theta} \quad 0.5$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{\frac{M}{2} + m} \tilde{\theta} = 0 \quad 0.5$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{M}{2} + m}} \quad 1$$

- طريقة لاغرانج

$$T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2 \quad 0.5$$

$$J_0 = \frac{1}{2} M r^2$$

$$U = \frac{1}{2} k (r \tilde{\theta})^2 \quad 0.5$$

$$L = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2 - \frac{1}{2} k (r \tilde{\theta})^2 \quad 1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J_0 \dot{\theta} + m r^2 \dot{\theta} = (J_0 + m r^2) \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = (J_0 + m r^2) \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k r \tilde{\theta}$$

$$(J_0 + m r^2) \ddot{\theta} + k r \tilde{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{\frac{M}{2} + m} \tilde{\theta} = 0 \quad 0.5$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{M}{2} + m}} \quad 1$$

تمارين 3 (9pts)

$$T = \frac{1}{2} m (3L\dot{\theta})^2 = \frac{9}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 \quad 0,5$$

$$U = mg(3l - 3l \cos \theta) + \frac{1}{2} k (L \sin \theta)^2 \\ = \frac{3}{2} mgL \theta^2 + \frac{1}{2} k L^2 \theta^2 \quad 0,5$$

$$D = \frac{1}{2} c (2L\dot{\theta})^2 = 2cL^2 \dot{\theta}^2 \quad 0,5$$

$$L = \frac{9}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} (3mgL + kL^2) \theta^2 \quad 0,75$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \quad 0,5$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 9mL^2 \ddot{\theta} \quad 0,25$$

$$0,25 \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -(3mgL + kL^2) \theta, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 4cL^2 \dot{\theta} \quad 0,5$$

$$9mL^2 \ddot{\theta} + (3mgL + kL^2) \theta = -4cL^2 \dot{\theta}$$

$$1 \quad \ddot{\theta} + \frac{4c}{9m} \dot{\theta} + \left(\frac{g}{3L} + \frac{k}{9m} \right) \theta = 0 \quad \text{معادلة الحركة}$$

ذبت بترددات الاختفاء ω_D

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega} \quad , \quad \omega_D = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega_D = \sqrt{\left(\frac{g}{3L} + \frac{k}{9m} \right)^2 - \left(\frac{c}{2m} \right)^2} \quad 0,5$$

معادلة الحركة هي على الشكل :

$$0,5 \quad m \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + k \theta = 0$$

$$0,5 \quad \theta(t) = e^{-\zeta \omega_D t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t)$$

استجابة المصباح عند الشروط الأولية $t=0$: $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$, $\theta(0) = \theta_0$

$$\dot{\theta}(t) = -\zeta \omega e^{-\zeta \omega t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) + e^{-\zeta \omega t} (\omega_d A \cos \omega_d t - \omega_d B \sin \omega_d t)$$

0,1 A = $\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega \theta_0}{\omega_d}$, B = θ_0 0,1 بالتعويض نحصل على

0,1 $\theta(t) = e^{-\zeta \omega t} \left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega \theta_0}{\sqrt{\left(\frac{g}{3L} + \frac{k}{g_m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} \sin \sqrt{\left(\frac{g}{3L} + \frac{k}{g_m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t + \theta_0 \cos \sqrt{\left(\frac{g}{3L} + \frac{k}{g_m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t \right)$

$\theta(t) = e^{-\zeta \omega t} \left(\cos \sqrt{\left(\frac{g}{3L} + \frac{k}{g_m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t - \phi \right)$ 0,1

$\phi = \left(\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega \theta_0}{\sqrt{\left(\frac{g}{3L} + \frac{k}{g_m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} \right)^2 + \theta_0^2 \right)^{1/2}$ 0,1

$\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega \theta_0}{\theta_0 \sqrt{\left(\frac{g}{3L} + \frac{k}{g_m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}}$ 0,1